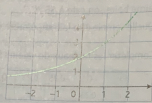


## Exercices

### Entraînement

#### Sens de variation et représentations graphiques

On considère la fonction  $f$  du type  $x \mapsto kx^a$ , l'ensemble des réels  $x$  et de  $a$  par lecture graphique.



#### 32 Vrai ou faux ?

Pour chaque proposition, déterminer si elle est vraie ou fautive. Justifier la réponse.

- Pour tout réel  $x > 0$ , on a :  $0,8^x > 1$ .
- $0,5^{0,8} < 0,5$ .
- Si  $x \geq 2$ , alors :  $0,5^x \geq 0,25$ .
- Si  $x < -1$  alors :  $2^x < 0,5$ .

#### 33 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0,8^x > 0,8^3$ .

##### Méthode

Pour résoudre une inéquation du type  $a^x > a^b$ , on procède ainsi :  
(1) donner le sens de variation de la fonction  $x \mapsto a^x$  ;  
(2) utiliser le fait qu'une fonction croissante conserve le sens des inégalités et qu'une fonction décroissante change le sens des inégalités.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1,01^x$ .

- Quel est le sens de variation de  $f$  ?
- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $1,01^x > 1,01^{3,5}$ .

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 0,33^x$ .

- Quel est le sens de variation de  $f$  ?
- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $0,33^x \approx 0,33^{1,8}$ .

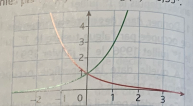
Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 4^x$ .

- Quel est le sens de variation de  $f$  ?
- Calculer  $f(3,5)$ .
- En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'inéquation :  $4^x \geq 128$ .

#### 37 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations :

- $0,68^{3x} \geq 0,68^5$
- $1,4^{5x+1} < 1,4^6$
- $\left(\frac{7}{9}\right)^{x+4} \leq \left(\frac{7}{9}\right)^{3x+1}$
- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3x+1} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$

On a représenté ci-dessous les fonctions  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = 2,9^x$  et  $g(x) = 0,35^x$ .



- Quelle est la courbe représentative de  $f$  ? Justifier ce choix.

2. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 4$ . L'utilisation de la calculatrice graphique permet d'obtenir une solution approchée à 0,01 près.

3. Déterminer graphiquement l'ensemble des réels  $x$  tels que :  $f(x) \leq 4$  et  $g(x) \leq 4$ .

39 la concentration en  $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'un produit lors d'une réaction chimique est donnée en fonction du temps  $t$  en minutes par la formule  $c(t) = 50 \times 0,82^t$ .



- Déterminer la concentration initiale.

2. Quel est le sens de variation de la fonction  $c$  ?

3. Déterminer, à l'aide d'un outil numérique, le temps de demi-réaction, c'est-à-dire le temps au bout duquel la concentration du produit a diminué de moitié.

#### 40 STMG

L'offre  $o$  et la demande  $d$  pour un produit (en milliers d'unités) sont modélisées par deux fonctions Pour tout  $x \in [0; 10]$ , on a :  $o(x) = 1,3^x - 1$  et  $d(x) = 10 \times 0,8^x$ .

- Calculer  $o(2)$ ,  $d(2)$  et interpréter les résultats.
- Déterminer le sens de variation des fonctions  $o$  et  $d$ .

#### 38 On donne le



a. Donner, par lecture graphique, le montant de l'offre correspondant à un prix de vente de 5 €.

b. Utiliser la calculatrice graphique pour déterminer le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

4. Reprendre la question 3.b avec la calculatrice graphique pour donner un résultat au centime près.

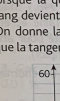
#### 41 ST2S

On injecte à un patient une dose de 40 mg d'anti-inflammatoire. On admet que la quantité d'anti-inflammatoire (en mg) présente dans le sang est donnée par la fonction  $q$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $q(t) = 40 \times 0,68^t$  où  $t$  est le temps écoulé (en heure) depuis l'injection.

- Quel est le sens de variation de la fonction  $q$  ?

2. On peut procéder à une deuxième injection lorsque la quantité d'anti-inflammatoire dans le sang devient inférieure à 2 mg.

On donne la représentation graphique de  $q$  ainsi que la tangente  $T$  à sa courbe au point d'abscisse 6.



a. Indiquer, avec la précision permise par le graphique, la quantité d'anti-inflammatoire présente dans le sang au bout de 2 heures.

b. Au bout de combien de temps peut-on procéder à une deuxième injection ?

3. Reprendre les deux questions précédentes en utilisant la calculatrice graphique.

4. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente  $T$  et interpréter ce résultat.

42 Le zircon contient deux variétés d'uranium qui se transforment en deux variétés de plomb avec le temps. Ainsi la proportion d'uranium 235 transformé en plomb 207 est donnée par la fonction  $f$  vérifiant :  $f(t) = 1 - 0,3715^t$ . Et la proportion d'uranium 238 transformé en plomb 206 est donnée par :  $g(t) = 1 - 0,8572^t$ . Le temps  $t$  est en milliards d'années.

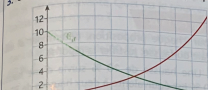
En 1956, le géochimiste Clair Patterson a établi l'âge de la Terre en mesurant la proportion d'uranium transformé en plomb dans une météorite. 50 % de l'uranium 238 et 98,84 % de l'uranium 235 s'étaient transformés en plomb.

- Préciser le sens de variation des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Calculer  $f(0,7)$ .

Pourquoy dit-on que la demi-vie de l'uranium 235 est de 700 millions d'années ?

3. Quel est, à 100 millions d'années près, l'âge de la Terre ?

#### 3. On donne leurs représentations graphiques.



a. Donner, par lecture graphique, le montant de l'offre correspondant à un prix de vente de 5 €.

b. Utiliser la calculatrice graphique pour déterminer le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

4. Reprendre la question 3.b avec la calculatrice graphique pour donner un résultat au centime près.

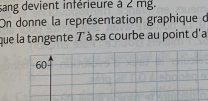
#### 41 ST2S

On injecte à un patient une dose de 40 mg d'anti-inflammatoire. On admet que la quantité d'anti-inflammatoire (en mg) présente dans le sang est donnée par la fonction  $q$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $q(t) = 40 \times 0,68^t$  où  $t$  est le temps écoulé (en heure) depuis l'injection.

- Quel est le sens de variation de la fonction  $q$  ?

2. On peut procéder à une deuxième injection lorsque la quantité d'anti-inflammatoire dans le sang devient inférieure à 2 mg.

On donne la représentation graphique de  $q$  ainsi que la tangente  $T$  à sa courbe au point d'abscisse 6.



a. Indiquer, avec la précision permise par le graphique, la quantité d'anti-inflammatoire présente dans le sang au bout de 2 heures.

b. Au bout de combien de temps peut-on procéder à une deuxième injection ?

3. Reprendre les deux questions précédentes en utilisant la calculatrice graphique.

4. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente  $T$  et interpréter ce résultat.

## Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

#### 43 Vrai ou faux ?

Pour chaque égalité ou phrase, déterminer si elle est vraie ou fautive. Justifier la réponse.

- $5^3 \times 25^3 = 5^8$
- $\left(\frac{1}{5^2} \times 5^3\right)^6 = 5$
- $\left(t^3 \times \frac{1}{t^{12}}\right)^2 = t^{18}$
- Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = 2^t \times 2^{15t}$  et  $g(t) = (2^{0,5})^t$  sont égales.

44 Simplifier les expressions suivantes, puis calculer leurs valeurs.

$$A = (0,3^{0,4})^5; \quad B = 1,25^3 \times 1,25^{\frac{8}{3}}$$

$$C = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}; \quad D = 3,5^{0,6} \times \left(\frac{7}{2}\right)^{0,4}$$

45 Simplifier les expressions suivantes.

$$A = (a^{1,1})^2 \times \left(\frac{a^{1,1}}{b^{0,2}}\right)^2; \quad B = \frac{a^{2,8} \times (b^{1,3})^4}{(a^{1,1}b^{2,2})^2}$$

$$C = (a^{0,8} + b^{0,2})^2 + (a^{0,8} - b^{0,2})^2$$

46 Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x^{1,5} - x^{2,5}$ .

- Montrer que :  $f(x) = x^{1,5}(x - 1)$ .
- En déduire le tableau de signe de la fonction  $f$ .

## Exercices

### Entraînement

#### 47 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^{0,2} = 2$ .

##### Méthode

Pour résoudre une équation du type  $x^a = b$ , on procède ainsi :  
(1) donner le sens de variation de la fonction  $x \mapsto x^a$  ;  
(2) utiliser le fait qu'une fonction croissante conserve le sens des inégalités et qu'une fonction décroissante change le sens des inégalités.

48 Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations suivantes.

- $x^{0,2} = 3$
- $x^{0,1} = 3$
- $x^{0,5} = 2,5$
- $x^{0,5} = 10$

49 Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

- $x^{0,2} \geq 3$
- $x^{0,6} \geq 2$
- $x^{0,25} \leq 5$
- $x^{0,4} \leq 1,5$

50 Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes.

- $x^{0,5} \leq 5$
- $x^{0,2} \geq 2$
- $x^{0,5} \leq 3$
- $x^{0,4} \leq 1,5$

51 Compléter le tableau de valeurs sans calculer la valeur de  $a$ . Les résultats seront donnés à  $10^{-4}$  près.

$x$	-2	0	2	3	4	5
$a^x$	...	...	1,44	1,728	...	...

52 Soit  $x$  un réel positif.

- Calculer  $16^{0,5}$ .
- Simplifier  $(x^{0,5})^2$ .
- Proposer une autre écriture de  $x^{0,5}$ .

53 On modélise l'évolution de la population de la ville de Nohouaire depuis 2010 par la fonction  $p$ , avec :  $p(x) = 12 \times 2^{0,01x}$ .  $p(x)$  est la population en milliers d'habitants en (2010 +  $x$ ).

- Quelle était la population en 2010 et en 2020 ?
- En quelle année, selon ce modèle, la population dépassera-t-elle 20 000 habitants ?
- Montrer que :  $p(x+18) = 2 \times p(x)$ . Interpréter ce résultat.

#### 4. Application au calcul du taux moyen

##### 54 Vrai ou faux ?

Pour chaque proposition, déterminer si elle est vraie ou fautive. Justifier la réponse.

- Une hausse de 10 % suivie d'une hausse de 50 % est équivalente à deux hausses de 30 %.
- Quatre hausses de 5 % valent mieux qu'une hausse de 20 %.
- Un taux annuel de 6,2 % est similaire à un taux mensuel de 0,5 %.

55 Un placement financier rapporte 1,25 % par an. Quel est son rendement mensuel à 0,01 % près ?

##### 56 ST2S

Les dépenses courantes de santé de la Sécurité sociale s'élevaient à 181 424 millions d'euros en 2012 et à 202 404 millions d'euros en 2020 (source : Direction de la recherche, des études de l'évaluation et des statistiques ou DREES).

- Calculer le taux d'évolution de ces dépenses de 2012 à 2020 à 0,01 % près.
- Déterminer le taux d'augmentation annuel moyen correspondant à 0,01 % près.

##### 57 STMG

En mars 2015, on comptait 5 948,1 milliers de chômeurs en France métropolitaine et en mars 2019, ce nombre avait augmenté pour atteindre 6 562,1 milliers (source : Pôle emploi).

- Calculer le taux d'évolution du chômage sur cette période à 0,1 % près.
- En déduire le taux d'évolution annuel moyen à 0,1 % près.

##### 58

Le nombre d'adhérents à un club de basket a augmenté lors des trois dernières années de 2,5 %, puis de 4,1 %, et enfin de 3,8 %. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

##### Méthode

Pour calculer un taux moyen, on procède ainsi :  
(1) calculer les coefficients multiplicateurs pour chaque année, puis le coefficient multiplicateur global  $CM$  sur la période (ici, 3 ans) ;  
(2) résoudre  $x^3 = CM$  pour trouver le coefficient multiplicateur annuel ;  
(3) en déduire le taux moyen.

59 Une action baisse de 20 % une année, puis de 80 % l'année suivante. Quel est le pourcentage de baisse annuel moyen ?

60 Quel est le taux d'évolution moyen correspondant à une hausse de 60 %, suivie d'une baisse de 60 % ?

61 Compléter le tableau indiquant le taux moyen  $t_n$  correspondant à  $n$  évolutions successives aux taux indiqués (en %).

$n$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_n$
4	-10 %	-3 %	+4 %	-2 %	+0,9 %
3	-10 %	-10 %	+6 %	...	...
2	-10 %	+4 %	...	...	...
4	-10 %	-15 %	+6 %	+9 %	...
3	-10 %	-6 %	+4 %	-1 %	...
4	-10 %	-35 %	+50 %	...	...
3	-10 %	+5 %	...	...	+2,9 %
4	-15 %	-9 %	+6 %	...	-0,9 %

62 Le 1<sup>er</sup> janvier 2019, on a placé 5 000 € sur un compte avec un rendement annuel de 2 %. Les intérêts produits sont calculés au moment du retrait en tenant compte du nombre exact de jours. La somme d'argent disponible au bout de  $x$  années est donnée par :  $s(x) = k \times a^x$  où  $k$  et  $a$  sont des réels à déterminer.

- Déterminer  $k$  et  $a$ .
- Quelle somme d'argent sera disponible le 8 avril 2019 ? Et le 15 novembre 2022 ?
- Calculer le taux mensuel de ce placement à 0,01 %.
- Calculer de deux façons différentes la somme d'argent disponible le 1<sup>er</sup> juillet 2019. Quel résultat est le plus fiable ?

63 Maurice investit dans un produit financier rapportant 2,8 % annuellement.

- Son capital aura-t-il doublé en 20 ans ?
- Au bout de combien de jours aura-t-il doublé ?
- Quel taux annuel, à 0,01 % près, faudrait-il pour que le capital de Maurice double en 20 ans ?

64 Le tableau suivant donne l'évolution de la température moyenne relevée à Paris en juillet par rapport à la décennie précédente (source : Infoclimat).

Décennie	1980-1989	1990-1999	2000-2009	2010-2019
Taux	+3,6 %	+3 %	-1 %	+5,9 %

65 On applique la fonction ci-dessous à la liste  $[3,6, 3, -1, 5, 9]$ .

Testez en environnement Python avec le fichier C02\_Ex.63.

- Que contient la liste  $cm$  ?
- Quelle est la valeur de  $p$  à la dernière ligne ?
- Donner et interpréter le résultat renvoyé par la fonction.

66 Voici les variations quotidiennes du CAC 40 dans la semaine du lundi 6 au vendredi 10 octobre 2008.

Date	06/10	07/10	08/10	09/10	10/10
CAC 40	-9,04 %	+0,55 %	-6,31 %	-1,55 %	-7,73 %

Les taux seront donnés à 0,01 % près.

- Vérifier que le CAC 40 a perdu 22,16 % au cours de cette semaine de 2008.
- Quel a été le pourcentage moyen de baisse quotidienne durant cette semaine de 2008 ?
- Lundi 13 octobre 2008, le CAC 40 est passé de 3 176,49 à 3 531,50 points, signifiant ainsi la plus forte hausse en une journée de son histoire. Calculer le pourcentage de hausse correspondant, puis le taux moyen d'évolution par jour sur cette période de 6 jours.

67 Ouvrir le fichier tableau econ-gen-taux-inflation issu du site de l'Insee contenant les taux d'inflation en France et calculer l'inflation annuelle moyenne sur les dix dernières années et sur les dix années précédentes. Commenter.

68 Ouvrir le fichier tableau econ-gen-part-pib-ue issu du site de l'Insee contenant le produit intérieur brut (PIB) des pays de la zone euro.

- Calculer le taux d'évolution annuel moyen du PIB de la France et de l'Allemagne sur les cinq dernières années. Commenter ces résultats.
- a. Étendre le calcul à tous les pays de la zone euro.  
b. Quel est le pays dont l'économie s'est le plus développée sur les cinq dernières années ?



